

遠近法の射影変換パラメータ計算の高速化

2013/08/21 NyARToolkit project nyatla@nyatla.jp

遠近法のパラメータは、8x8 行列の逆行列から求めることができるが、これは計算量が多い。この問題を解決するため、行列を 2 つの 4x4 の行列に分解し、連立方程式で解く事を考える。

手順

遠近法の基本式

$$\begin{cases} x = \frac{AX+BY+C}{GX+HY+1} \\ y = \frac{DX+EY+F}{GX+HY+1} \end{cases} \dots(1)$$

(1)を展開

$$\begin{cases} AX + BY + C - GXx - HYy = x \\ DX + EY + F - GXy - HYx = y \end{cases} \dots(2)$$

(2)に 4 頂点分の座標を投入して行列を作る。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \end{cases} \dots(3)$$

5*4 行列を 4*4 行列に変換する。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - C \\ x_2 - C \\ x_3 - C \\ x_4 - C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - F \\ y_2 - F \\ y_3 - F \\ y_4 - F \end{bmatrix} \end{cases} \dots(4)$$

行列の定義

$$\begin{cases} [T_x] = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1X_1 & -Y_1X_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2X_2 & -Y_2X_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3X_3 & -Y_3X_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4X_4 & -Y_4X_4 \end{bmatrix} \\ [T_y] = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1Y_1 & -Y_1Y_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2Y_2 & -Y_2Y_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3Y_3 & -Y_3Y_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4Y_4 & -Y_4Y_4 \end{bmatrix} \end{cases} \dots(5)$$

$$\begin{cases} [T_x]^{-1} = \begin{bmatrix} t_{x11} & t_{x12} & t_{x13} & t_{x14} \\ t_{x21} & t_{x22} & t_{x23} & t_{x24} \\ t_{x31} & t_{x32} & t_{x33} & t_{x34} \\ t_{x41} & t_{x42} & t_{x43} & t_{x44} \end{bmatrix} \\ [T_y]^{-1} = \begin{bmatrix} t_{y11} & t_{y12} & t_{y13} & t_{y14} \\ t_{y21} & t_{y22} & t_{y23} & t_{y24} \\ t_{y31} & t_{y32} & t_{y33} & t_{y34} \\ t_{y41} & t_{y42} & t_{y43} & t_{y44} \end{bmatrix} \end{cases} \dots(6)$$

係数を求める行列を計算。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = [T_x]^{-1} \begin{bmatrix} X_1 - C \\ X_2 - C \\ X_3 - C \\ X_4 - C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = [T_y]^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 - F \\ Y_2 - F \\ Y_3 - F \\ Y_4 - F \end{bmatrix} \end{cases} \dots(7)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x11} & t_{x12} & t_{x13} & t_{x14} \\ t_{x21} & t_{x22} & t_{x23} & t_{x24} \\ t_{x31} & t_{x32} & t_{x33} & t_{x34} \\ t_{x41} & t_{x42} & t_{x43} & t_{x44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - C \\ X_2 - C \\ X_3 - C \\ X_4 - C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{y11} & t_{y12} & t_{y13} & t_{y14} \\ t_{y21} & t_{y22} & t_{y23} & t_{y24} \\ t_{y31} & t_{y32} & t_{y33} & t_{y34} \\ t_{y41} & t_{y42} & t_{y43} & t_{y44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 - F \\ Y_2 - F \\ Y_3 - F \\ Y_4 - F \end{bmatrix} \end{cases} \dots(8)$$

(8)を展開する。

$$\begin{cases} A = t_{x11}X_1 + t_{x12}X_2 + t_{x13}X_3 + t_{x14}X_4 - C(t_{x11} + t_{x12} + t_{x13} + t_{x14}) \\ B = t_{x21}X_1 + t_{x22}X_2 + t_{x23}X_3 + t_{x24}X_4 - C(t_{x21} + t_{x22} + t_{x23} + t_{x24}) \\ G = t_{x31}X_1 + t_{x32}X_2 + t_{x33}X_3 + t_{x34}X_4 - C(t_{x31} + t_{x32} + t_{x33} + t_{x34}) \\ H = t_{x41}X_1 + t_{x42}X_2 + t_{x43}X_3 + t_{x44}X_4 - C(t_{x41} + t_{x42} + t_{x43} + t_{x44}) \\ D = t_{y11}Y_1 + t_{y12}Y_2 + t_{y13}Y_3 + t_{y14}Y_4 - F(t_{y11} + t_{y12} + t_{y13} + t_{y14}) \\ E = t_{y21}Y_1 + t_{y22}Y_2 + t_{y23}Y_3 + t_{y24}Y_4 - F(t_{y21} + t_{y22} + t_{y23} + t_{y24}) \\ G = t_{y31}Y_1 + t_{y32}Y_2 + t_{y33}Y_3 + t_{y34}Y_4 - F(t_{y31} + t_{y32} + t_{y33} + t_{y34}) \\ H = t_{y41}Y_1 + t_{y42}Y_2 + t_{y43}Y_3 + t_{y44}Y_4 - F(t_{y41} + t_{y42} + t_{y43} + t_{y44}) \end{cases} \dots(11)$$

G,H の式に着目して、C,F の方程式を解く。

C,F が得られると、A,B,D,E,G,H を求めることができる。

更新履歴

2010/04/24 - 新規作成

2013/08/21 - 式(11)の B,G,H の誤りを修正

2013/08/21 - 式(11)の H の誤りを修正